Вопрос 9
Существование равновесия в модели Неймана.

Модель Неймана описана в начале 6-го билета

Определение. Невырожденным положением равновесия в модели Неймана называется тройка (α, x, p), где $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}_+^m$, $p \in \mathbb{R}_+^n$, удовлетворяющая соотношениям:

$$\alpha Ax \le Bx \tag{2.13}$$

$$\alpha pA \ge pB \tag{2.14}$$

$$pAx > 0 . \tag{2.15}$$

Теорема. Пусть в модели Неймана $A \ge 0$, $B \ge 0$ и в матрице A нет нулевых столбцов, в матрице B нет нулевых строк. Тогда существует решение системы (2.13)-(2.15).

Условия этой теоремы означают, что нет производственных процессов, которые ничего не тратят, и всякий процесс производит продукт.

Доказательство. Рассмотрим задачу линейного программирования

$$\begin{gathered} \min u \\ (A - \lambda B)x - ue^n \le 0, \ \langle x, e^m \rangle = 1, \ x \ge 0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Здесь λ – числовой параметр, x, u – переменные, e^n – n-мерный единичный вектор, e^m – m-мерный единичный вектор. Функция $u(\lambda)$, являющаяся значением задачи (2.16) в зависимости от параметра λ, обладаем следующими свойствами:

1) $u(\lambda)$ непрерывна на всей числовой оси,
2) $u(0) > 0$,
3) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} u(\lambda) = -\infty$,
4) $u(\lambda)$ монотонно убывает.

Из этих свойств следует, что существует $\bar{\lambda} > 0$, для которого $u(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{x}$ соответствующее решение задачи (2.16). Тогда $A\bar{x} \le \bar{\lambda} B\bar{x}$, $\bar{x} \ge 0$.

Рассмотрим задачу, двойственную к (2.16):

$$\begin{gathered} \max v \\ p(A - \lambda B) - ve^n \ge 0, \ \langle p, e^n \rangle = 1, \ p \ge 0. \end{gathered} \tag{2.17}$$

По теореме двойственности $v(\bar{\lambda}) = 0$. Обозначим через $\bar{p}$ соответствующее решение задачи (2.17). Тогда $\bar{p}A \ge \bar{\lambda}\bar{p}B$, $\bar{p} \ge 0$. Таким образом, тройка $(\bar{\lambda}^{-1}, \bar{x}, \bar{p})$ является положением равновесия в модели Неймана. Однако оно может быть вырожденным.

Для указания невырожденного положения равновесия рассмотрим множество решений уравнения $u(\lambda) = 0$. Из свойств функции $u(\lambda)$ нетрудно заключить, что это множество является отрезком $[\lambda_0, \lambda_1]$, причем $\lambda_0 > 0$. Покажем, что существует невырожденное равновесие, соответствующее числу $\alpha = \lambda_1^{-1}$.

Среди всех решений $\overline{p}$ задачи (2.17) выберем p^*, для которого вектор $p^* A$ обладает наибольшим числом положительных компонент. Теперь покажем, что существует вектор x^*, который образует вместе с указанными α и p^* невырожденное положение равновесия. Допустим противное. Тогда из того, что $(A - \lambda_1 B)x \le 0$ и $x \ge 0$ следует, что $p^* A x \le 0$. По теореме о линейных неравенствах [3] это означает, что существует неотрицательный вектор q, удовлетворяющий условию $q(A - \lambda_1 B) \ge p^* A$.

Вектор q обладает следующими свойствами:

$$(qA)_j > \lambda_1 (qB)_j, \ \ \textit{для} \ \ j \notin \{j \,|\, (pA)_j = 0\},$$

$$(qA)_j = \lambda_1 (qB)_j = 0, \ \ \textit{для} \ \ j \in \{j \,|\, (pA)_j = 0\},$$

которые означают, что существует $\Delta > 0$ такой, что $qA \ge (\lambda_1 + \Delta)B$, т.е. вектор $(q, 0)$ допустим для задачи (2.17) при $\lambda = \lambda_1 + \Delta$. Следовательно, $u(\lambda_1 + \Delta) = v(\lambda_1 + \Delta) \ge 0$, что противоречит свойствам функции $u(\lambda)$ и максимальности числа λ_1. Тем самым показано, что числу λ_1 отвечает невырожденное положение равновесия $(\lambda_1^{-1}, x^*, p^*)$, и теорема доказана.

Приведенное доказательство является конструктивным, поскольку оно указывает способ нахождения числа λ_1, определяющего темп роста экономики в модели Неймана.

Отметим связь между состояниями равновесия модели Неймана и решениями задач (2.16) и (2.17).

Теорема. Тройка (α, x, p) является положением равновесия (быть может, вырожденного) в модели Неймана тогда и только тогда, когда $u(\alpha^{-1}) = 0$, а пары $(x, 0)$ и $(p, 0)$ являются, соответственно, решениями пары двойственных задач (2.16) и (2.17) при $\lambda = \alpha^{-1}$.

Определение. Число α называется темпом роста.

Определение. Число λ_0 называется ***числом Неймана***, число λ_1 – ***числом Фробениуса*** модели Неймана (A, B).

Числа $\alpha = \lambda_0^{-1}$ и $\beta = \lambda_1^{-1}$ определяют, соответственно, максимально и минимально возможные темпы роста по стационарной траектории.

Отметим имеющуюся аналогию между собственными числами матрицы Леонтьева и темпами роста модели Неймана с точки зрения продуктивности.

Определение. Модель Неймана (A,B) ***продуктивна***, если система $Bx - Ax \geq c$, $x \geq 0$, имеет решение при любом $c \geq 0$.

Теорема. Модель Неймана продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше 1.